

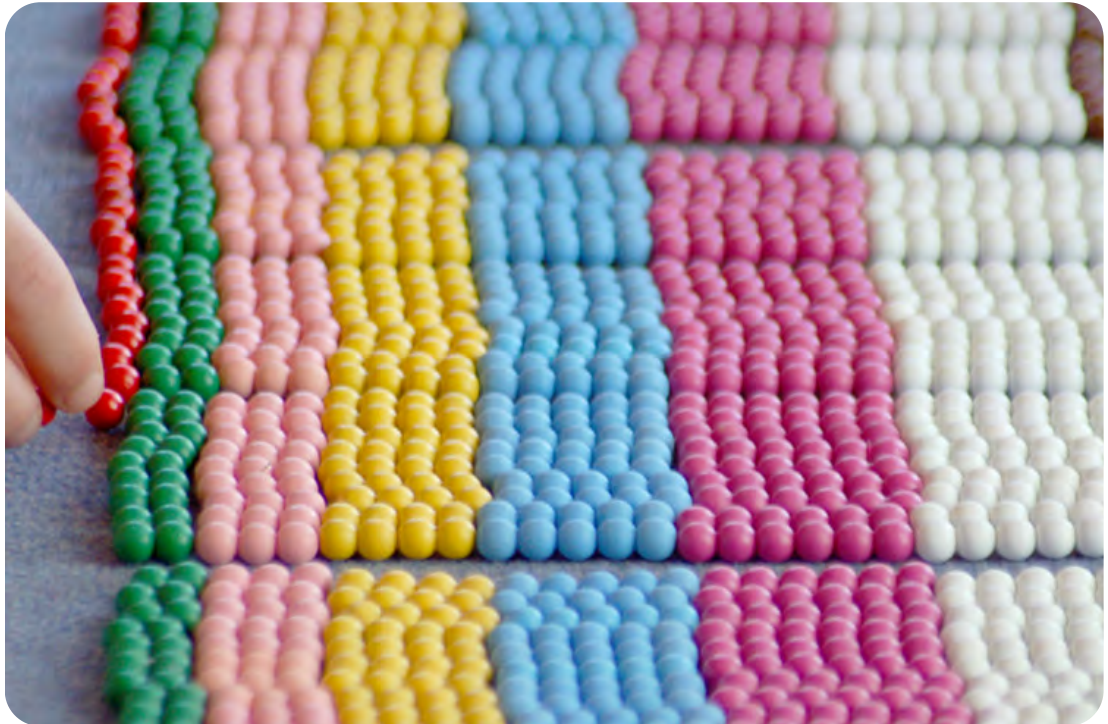


Bildungswerkstätte Eigenaktives Lernen
Montessori-Pädagogik – aktuell und zeitgemäß

MONTESSORI PRAXIS

HANDBUCH

für zeitgemäßes Lernen in der Schule



Mathematik 3

Algebra & Geometrie

Margareta Harrer

BEL-Verlag



MONTESSORI PRAXIS

HANDBUCH

für zeitgemäßes Lernen in der Schule

Mathematik 3

Algebra & Geometrie

1. Auflage 2017

© BEL-Verlag, M. u. K. Harrer GnbR
BEL – Bildungswerkstätte Eigenaktives Lernen
Aich-Weinbergstraße 1c
4865 Nussdorf am Attersee
Österreich
www.bel-montessori.at
info@bel-montessori.at

Autorin: Drⁱⁿ. Mag^a. Margareta Harrer
Graphische Gestaltung und Satz: Klemens Harrer
Druck: BEL-Verlag
ISBN: 978-3-9504142-2-6

Dieses Handbuch ist urheberrechtlich geschützt. Alle Rechte sind vorbehalten. Jegliche – auch auszugsweise – Verwertung, Wiedergabe, Vervielfältigung oder Speicherung, ob elektronisch, mechanisch, durch Fotokopie oder Aufzeichnung, bedarf der vorherigen schriftlichen Genehmigung durch Margareta und Klemens Harrer GnbR | BEL-Verlag | März 2017

Vorwort

Seit fast 20 Jahren, die ich als Trainerin und Referentin für unsere Montessori-Ausbildungen tätig bin, beobachte ich bei den Lernenden und Studierenden das Phänomen der Faszination betreffend des ganzheitlich-reformpädagogischen Ansatzes von Maria Montessori. Gerade im Teilbereich Mathematik zeigt sich diese Faszination besonders deutlich – haben doch die meisten der letzten Bildungsgenerationen Mathematik immer noch als äußerst abstrakten und unzugänglichen ‚Stoff‘ erfahren. Oft kommt es in Ausbildungssituationen zu Ausrufen wie: „Jetzt versteh ich!“, „Das ist ja unglaublich! Wie einfach!“ „Das will ich sofort in meiner Schule umsetzen!“

1934 veröffentlicht Montessori zwei wichtige Bücher – ‚Psico Aritmética‘ und ‚Psico Geometría‘ – für damalige Zeiten revolutionär, für heutige Zeiten äußerst zeitgemäß – über die Psychologie des kindlichen Lernens und einer kindgerechten Didaktik zur Mathematik, bei dem das Material eine wichtiger Kristallisierungspunkt ist. In ihrem Buch ‚Psico Aritmética‘ sagt sie:

„Legt man dem Kind wissenschaftlich festgelegtes Material vor, das ihm auf klare und einleuchtende Art und Weise die Grundlage für vernunftmäßiges Handeln vermittelt, so erleichtert man ihm nicht nur das Erlernen der Arithmetik, indem man sie in höherer Form darlegt, sondern auch die Entwicklung einer logischen Tiefe, von der man geglaubt hat, sie sei für Kinder unerreichbar. Die Materialien der Arithmetik sind vergleichbar mit ‚einem Turnplatz der geistigen Ertüchtigung‘. Bei der auf der Klarheit der Dinge und auf aktiver Übung beruhenden minutiösen Analyse wird die geistige Entwicklung von allen Einzelheiten begleitet, als wäre die Arithmetik das geeignetste Mittel für den echten psychologischen Umgang mit dem Kind, ein Arsenal experimenteller Psychologie. ... Bei jedem Schüler stellt sich der Fortschritt gemäß dem inneren Gebot der Notwendigkeit, sich zu entwickeln, ein. Von hier aus erreicht der einzelne die ihm entsprechende Reifestufe, und als Folge der freien Wahl wird ein logischer und systematischer Fortschritt erreicht. Zwanzig Jahre ... Erfahrung haben gezeigt, dass kein anderes Fach an unseren Schulen die Kinder so zu begeistern vermochte wie die Arithmetik. Auch hat kein anderes Fach derart überraschende Erfolge gezeitigt wie das der Mathematik. Daher bietet sich uns im Bereich der Primarschule ein praktischer Weg in einer fruchtbaren Ebene an, wo wir früher nur Qualen und die Trockenheit der Wüste vorfanden.“



Das Praxishandbuch ‚Mathematik 3 – Algebra & Geometrie‘ soll Ihnen als Helfer im Alltag mit den Kindern in der Schule nutzen – sei es als Anleitung, Anregung, Nachschlagwerk und/oder Inspiration. Ich wünsche Ihnen viel Erfolg und viel Freude in Ihrer pädagogischen Praxis.

Drⁱⁿ. Margareta Harrer, Institut BEL, 2017

Inhaltsübersicht	Seite
1. Kommutativ- und Distributivgesetz der Multiplikation	4
2. Wichtige Basisübungen zum Quadrieren und Kubieren	8
2.1. Wichtige Vorübungen für das Quadrieren	9
2.2. Wichtige Vorübungen für das Kubieren	13
3. Quadrieren: Binom und Trinom	16
3.1. Quadrieren eines Binoms	16
3.2. Quadrieren eines Trinoms	20
3.3. Quadrieren von Binom und Trinom mit großen Zahlen und die Dekanomische Formel	21
3.4. Leitquadrate	25
4. Kubieren: Binom und Trinom	28
4.1. Kubieren eines Binoms	28
4.2. Kubieren eines Trinoms	33
5. Radizieren (Wurzelziehen)	36
5.1. Das Quadrat und seine Wurzel (Quadratwurzelziehen)	36
5.2. Der Kubus und seine Wurzel (Kubikwurzelziehen)	43
6. Nicht-dezimale Zahlensysteme	49
7. Geometrie	57
7.1. Geteilte Quadrate – Geometrische Konzepte: Gleichheit, Ähnlichkeit und Gleichwertigkeit	57
7.2. Geometriekasten	61
7.3. Die Fläche	68
7.4. Lehrsatz des Pythagoras	79
7.5. Das Volumen	84

1. Kommutativ- und Distributivgesetz der Multiplikation

Material:

- Goldenes Perlenmaterial
- Kasten mit bunten Perlenstäbchen
- Kasten mit Ziffernkärtchen von 1 bis 9
- und Rechenzeichen: + , - , • , : , ()
- Kleiner Kartensatz



Ziel:

- Einsicht in zwei wichtige Rechengesetze im Bereich der natürlichen Zahlen

Kommutativgesetz der Multiplikation	$\text{Multiplikand} \cdot \text{Multiplikator} = \text{Multiplikator} \cdot \text{Multiplikand}$ $3 \cdot 7 = 7 \cdot 3$ $a \cdot b = b \cdot a$
Distributivgesetz der Multiplikation	$\text{jedes Glied des Multiplikanden} \cdot \text{Multiplikator} = \text{Glied} + \text{Glied der Produkte}$ $(4 + 5) \cdot 3 = 4 \cdot 3 + 5 \cdot 3$ $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$

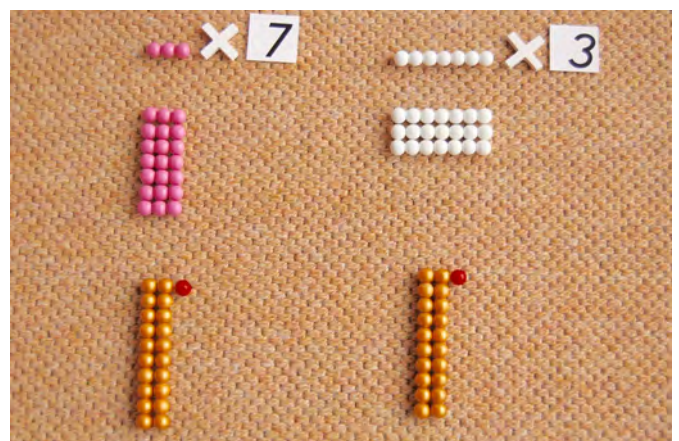
- Geometrische Darstellung des Kommutativ- und Distributivgesetzes
- Anwendung von Formeln

Übung 1: Kommutativgesetz der Multiplikation mit einstelligen Zahlen

Beispiel:

$$3 \cdot 7 = 7 \cdot 3$$

Perlenstäbchen und Zifferplättchen der linken Multiplikation der Gleichung werden hingelegt. Es wird multipliziert, wobei das Ergebnis darunter gelegt wird: 7 Dreier-Stäbchen, und weiter darunter wird das Ergebnis auf 2 Zehner und 1 Einer gewechselt. Auf die gleiche Art wird mit vertauschten Positionen der Perlenstange und der Ziffer verfahren: 3 Siebener-Stäbchen, darunter das Ergebnis.



Übung 2: Kommutativ- und Distributivgesetz der Multiplikation einer Summe mit einstelligen Zahlen

Beispiel:

$$3 \cdot (4 + 5) = (4 + 5) \cdot 3$$

Als erstes werden jeweils 4 und 5 mit 3 multipliziert, wobei hier klar gesagt wird, dass 4 und 5 zusammengehören. Deshalb wird beim Auflegen der Aufgabe das Vierer- und Fünfer-Stäbchen mit einer Klammer umfasst. Die 3 als Multiplikator wird mit dem Ziffernplättchen dargestellt.

Zuerst wird $3 \cdot 4$ multipliziert und die Anzahl von 3 Vierer-Stäbchen hingelegt.

Dann wird $3 \cdot 5$ gerechnet und die Anzahl von 3 Fünfer-Stäbchen hingelegt.

Die Perlenmengen werden schrittweise zusammengefasst, bis zuletzt das Ergebnis mit zwei Zehner- und einem Siebener-Stäbchen da liegt.



Sodann wird im gleichen Verfahren $4 \cdot 3$ und $5 \cdot 3$ bearbeitet.

Es ist festzustellen, dass hierbei das gleiche Ergebnis rauskommt.

Nachdem die Kinder nach ausreichender Übung die Prinzipien angewandt und erfahren haben, gibt man auch die mathematischen Fachbegriffe dafür.

Das **Kommutativgesetz** ist den Kinder schon lange bekannt - seit der Addition und Multiplikation mit den Rechentabellen und vielen anderen Gelegenheiten, wo addiert und multipliziert wurde. Es kann etwa mit den Worten verdeutlicht werden:

„Ihr wisst bereits, dass man bei der Addition genauso wie bei der Multiplikation die Zahlen vertauschen kann. z.B. $3 + 4 = 7$ und $4 + 3 = 7$, beim Malnehmen ebenso: $3 \cdot 7 = 21$ und $7 \cdot 3 = 21$. Es ist ein Rechengesetz, bei dem die Zahlen vertauscht werden können. Deshalb heißt es <Vertauschungsgesetz>. In der mathematischen Sprache sagen wir <Kommutativgesetz> dazu.“

Das **Distributivgesetz** ist für die Kinder neu. Nachdem die Kinder im Tun ausreichende Erfahrungen gemacht haben, kann der Begriff Distributivgesetz eingebracht werden.

Beispielsweise mit den Worten und an Hand eines konkreten Beispiel, das zeitgleich gelegt wird:

„Wir verknüpfen jedes Glied des Multiplikanden mit dem Multiplikator 3: demnach haben hier $3 \cdot 4$ und $3 \cdot 5$ “. Dabei wird auf das aufgelegte Rechenbeispiel verwiesen. „Das heißt, wir haben 4 und 5 mit dem Multiplikator verknüpft. Es ist ein Rechengesetz, bei dem die Zahlen verknüpft werden. Deshalb heißt es <Verknüpfungsgesetz>. In der Mathematik-Sprache sagen wir <Distributivgesetz> dazu“.

Den Kindern wird auch gezeigt, wie diese Rechengesetze verschriftlich werden.

Zu einem späteren und geeigneten Zeitpunkt kann man auch die **Definition und Anwendung einer Formel** einbringen. Wichtig ist, dass die Kinder genügend Erfahrungen mit dem Material gemacht haben und ein Verständnis für die neuen Rechenregeln entwickelt haben.

„Ich möchte dir/euch nun zeigen, was eine Formel ist. Du/ihr habt nun die verschiedensten Rechenbeispiele mit dem Material gemacht. Hast du/habt ihr bemerkt, dass immer die gleichen Regeln angewandt wurden?“ (Hier den Kindern für Rückmeldungen und Diskussionen Raum geben). „Rechnungen, die eigentlich immer gleich aussehen, sich nur betreffend der Zahlen unterscheiden, können ganz allgemein und vereinfacht aufgeschrieben werden.“

Diese allgemeine Schreibweise nennen wir <Formel>. z.B. nehmen wir $a \cdot b$:
 $a \cdot b$ steht dann für $3 \cdot 7$ oder $4 \cdot 5$ oder $2 \cdot 6$ oder ...

Aber Achtung!

Innerhalb einer Rechnung muss a und b immer und ohne Ausnahme den gleichen Wert behalten!

Das heißt, wenn $a = 3$ und $b = 7$, dann gilt:
 $a \cdot b = 3 \cdot 7$ und $b \cdot a = 7 \cdot 3$."

Übung 3: Kommutativ- und Distributivgesetz der Multiplikation mit zwei Summen

Beispiel:

$$(2 + 3) \cdot (4 + 5) = (4 + 5) \cdot (2 + 3)$$

Um eine klare Struktur zu erhalten, werden beim Ausmultiplizieren für den ersten Klammerausdruck Perlenstäbchen und für den zweiten Ziffernplättchen verwendet:

(Stäbchen 2 + Stäbchen 3) · (Ziffer 4 + Ziffer 5) = (Stäbchen 4 + Stäbchen 5) · (Ziffer 2 + Ziffer 3)

Schritt 1: es werden aufgelegt:

Zweierstäbchen mal 4, Dreierstäbchen mal 4

Zweierstäbchen mal 5, Dreierstäbchen mal 5

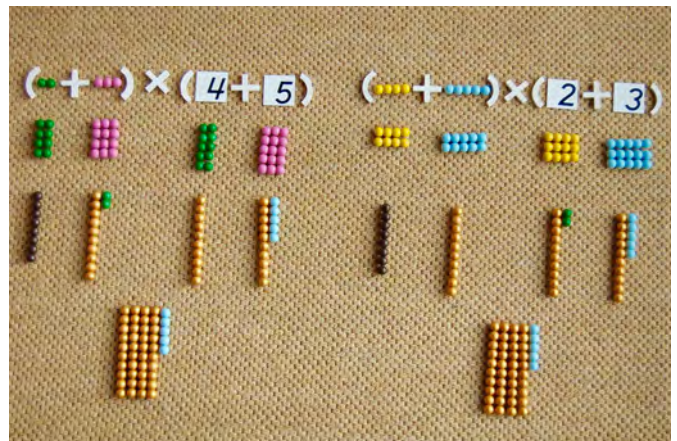
Schritt 2: daneben werden aufgelegt:

Viererstäbchen mal 2, Fünferstäbchen mal 2

Viererstäbchen mal 3, Fünferstäbchen mal 3

Schritt 3:

Die Summen werden zusammengefasst, bis das Ergebnis (4 Zehner, 1 Fünfer) vorliegt.



Beim Ausmultiplizieren zweier Summen wird das Distributivgesetz im Besonderen beansprucht. Die Kinder können auch das Kommutativgesetz durch zusätzliches Vertauschen der Summanden in den Klammerausdrücken überprüfen. Sie werden sehen, dass lediglich die Zwischenergebnisse anders ausfallen, aber die Summe das gleiche Ergebnis zeigt.

Übung 4: Distributivgesetz der Multiplikation mit mehrstelligen Zahlen

Beispiel:

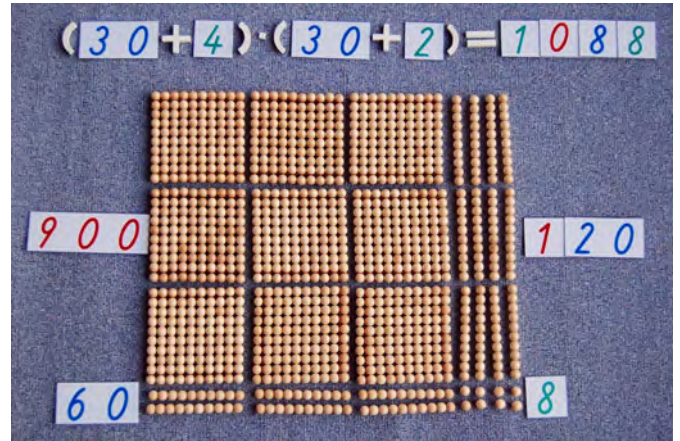
$$(30 + 4) \cdot (30 + 2)$$

Zuerst wird die Aufgabe mit dem kleinen Kartensatz und den Rechenzeichen gelegt.

$$\left(\boxed{3} \boxed{0} + \boxed{4} \right) \cdot \left(\boxed{3} \boxed{0} + \boxed{2} \right) =$$

1. Schritt:

Der erste Klammerausdruck $(30 + 4)$ wird mit 30 multipliziert und entsprechend mit Perlenmaterial dargestellt. Es entstehen drei mal drei Reihen mit Hundertern vier mal drei Reihen mit vertikal liegenden Zehnern. Nun wird der erste Klammerausdruck $(30 + 4)$ mit 2 multipliziert. Es entstehen drei mal zwei Reihen mit Zehnern und schließlich werden vier Einer mal 2 hingelegt.



Wenn das Kind in der aktiven Arbeit mit dem Material genügend Erfahrung gesammelt hat, kann man auch die schriftliche Lösung zeigen:

$$(30 + 4) \cdot (30 + 2) = (30 \cdot 30) + (4 \cdot 30) + (30 \cdot 2) + (4 \cdot 2) = 900 + 120 + 60 + 8 = 1088$$

Anmerkung:

Die bisher angeführten Übungen ermöglichen nicht nur eine vertiefende Einsicht in das Kommutativ- und Distributivgesetz, sie sind außerdem sehr geeignet und eine notwendige Basisarbeit, um auf die algebraische Mathematik vorzubereiten (binomische bzw. trinomische Formel).



Montessori-Pädagogik Zeitgemäßes Lernen in Kindergarten und Schule

Margareta Harrer legt in ihrem neuen Buch die wesentlichen Grundsätze und Ziele des Montessori-Modells klar, kompetent und pointiert offen. Dabei fokussiert sie die Säulen der Montessori-Pädagogik in Kindergarten und Schule. Wie zeitgemäßes Lernen in der Montessori-Praxis gelingt, zeigt das Buch in der Forderung nach einer konsequenten Neugestaltung und Organisation des Lernens. Das ermutigt und inspiriert sowohl erfahrene Pädagoginnen und Pädagogen als auch "Montessori-Neulinge".

Broschiert: 66 Seiten
Format: 21 x 17 x 0,5 cm
ISBN: 978-39504142-0-2
BEL-Verlag, www.bel-montessori.at



Handbuch Montessori Praxis – Mathematik 2 Arithmetik

Der Mathematik-Band 'Arithmetik' begleitet Sie Schritt für Schritt bei Ihrer Vorbereitung zum Einführen der Montessori-Materialien in der Schule. Die Autorin Frau Drⁱⁿ. Mag^a. Margareta Harrer schöpft aus ihrer Erfahrung als Ausbildungsleiterin der Montessori-Diplomlehrgänge und zeigt in den Praxisbüchern klar strukturierte und gezielt aufbauende Übungsbeispiele mit den Lernmaterialien zum Fachbereich Arithmetik. Die Handlungsschritte sind im Detail beschrieben und mit zahlreichen Bildern dokumentiert, womit der Grundstein für die weitere selbsttätige Materialarbeit gelegt ist.

Spiralheftung: 90 Seiten
Format: 27,9 x 21 x 1 cm
ISBN: 978-3-9504142-1-9
BEL-Verlag, www.bel-montessori.at



Dr. Margareta Harrer ist Expertin und gefragte Referentin für Montessori-Pädagogik

Leiterin der Bildungswerkstätte Eigenaktives Lernen (BEL) in Österreich | Ausbilderin der Lehrgänge zur Montessori-Pädagogik mit Schwerpunkt auf zeitgemäße Umsetzung in der Praxis | Doktorat in den Erziehungswissenschaften an der Universität Salzburg | Studium der Soziologie an der Universität Linz | Buchautorin | Begleitendes Coaching für Montessori-Pädagogik in Kindergarten und Schule.